BÖLÜM VI

FAKTÖRİYEL TASARIMLAR

Bazı araştırmalarda bağımlı değişkeni etkileyen faktör sayısı iki ya da daha fazla olabilir. Bu faktörler ve faktör düzeyleri araştırmacı tarafından belirlenir. Faktör düzeylerinin oluşturduğu deneme kombinasyonlarının tamamı üzerine kurulan tasarımlara faktöriyel tasarım denir. Birinci faktörün düzey sayısı a_1, ikinci faktörün düzey sayısı a_2, …, k-ncı faktörün düzey sayısı da a_k ise bu takdirde oluşturulacak olan faktöriyel tasarım $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k$ faktöriyel tasarımıdır. Bu faktöriyel tasarımda $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k$ kadar deneme kombinasyonu vardır. Örneğin; $2 \times 3 \times 2$ faktöriyel tasarımında 12 tane, 2^3- faktöriyel tasarımında 8 tane deneme kombinasyonu olacaktır. Deney birimleri deneme kombinasyonlarına rastgele atandığında, tamamen rastgele bir tasarım elde edilir.

VI.1 İki Faktörlü Tasarım

Bağımlı değişkende meydana gelen değişim üzerinde iki faktörün etkili olduğunu kabul edelim. Bu faktörleri A ve B ile gösterelim. Bu faktörlerin bağımlı değişken üzerine ayrı ayrı etkilerine **ana etki** *(main effect)* adı verilir. Eğer bağımlı değişken üzerinde bir faktörün etkisi diğer faktörün her düzeyinde aynı değilse faktörler arasında **etkileşim** (*interaction*) vardır denir.

İki faktöre ilişkin etkileşimi görsel olarak ifade edebilmek için A ve B faktörlerinin ikişer düzeyi olduğunu kabul edelim. Bu iki faktöre ilişkin etkileşim grafikleri Şekil 6.1'de verilmiştir. Şekil 6.1(a) 2×2 faktöriyel tasarımında A ve B faktörleri arasında etkileşimin olmaması durumunu göstermektedir. Şekil 6.1(b) ve (c) 2×2 faktöriyel tasarımında A ve B faktörleri arasında etkileşimin olduğu durumu göstermektedir.

A faktörünün a tane ve B faktörünün b tane düzeyinin olduğu bir $a \times b$ faktöriyel tasarımında deneme kombinasyonlarının sayısı $a \times b$ tanedir. Her bir deneme kombinasyonunda n tekrarın olduğunu, yani n $(n > 1)$ tane deneyin yapıldığını varsayalım. Bu şekilde oluşturulan n tekrarlı ve iki faktörlü tamamen rastgele bir tasarımda model denklemi;

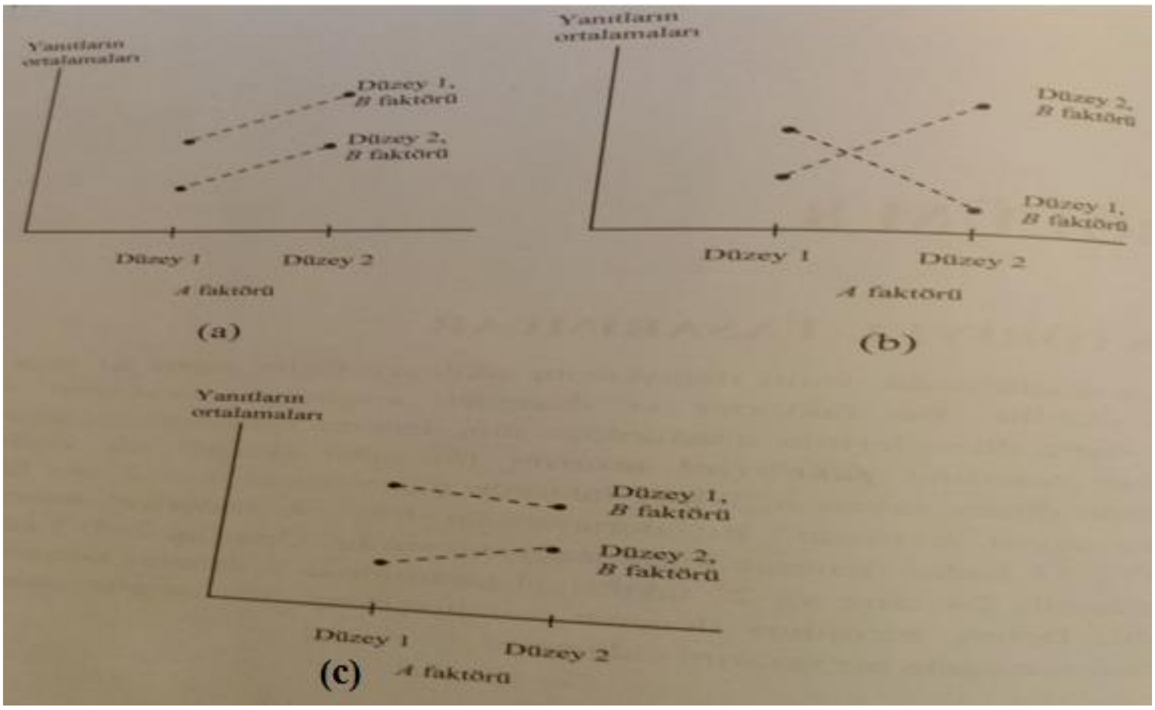
$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{k(ij)} \; ; \; i = \overline{1,a} \; ; j = \overline{1,b} \; ; k = \overline{1,n} \qquad (6.1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu modelde;

Y_{ijk}: k-ncı tekrarda A faktörünün i-nci düzeyinde ve B faktörünün j-nci düzeyindeki gözlem değeri

$\mu_{...}$: Genel kitle ortalaması

α_i : A faktörünün i-nci düzey etkisi $(\alpha_i = \mu_{i..} - \mu_{...})$



Şekil 6.1 2×2 faktöriyel tasarımında faktöriyel tasarımında etkileşim durumu

β_j: B faktörünün j-nci düzey etkisi, $\left(\beta_j = \mu_{.\ j\ .} - \mu_{.\ .\ .}\right)$

$\alpha\beta_{ij}$: A faktörünün i-nci düzey etkisi ile B faktörünün j-nci düzey etkisinin etkileşim etkisi

$$\left(\alpha\beta_{ij} = \mu_{i\ j\ .} - \mu_{i\ .\ .} - \mu_{.\ j\ .} + \mu_{.\ .\ .}\right)$$

$\varepsilon_{k(ij)}$: Hata terimi $\left(\varepsilon_{k(ij)} = Y_{ijk} - \mu_{i\ j\ .}\right)$

olarak bilinirler. Hata terimlerinin $\varepsilon_{k(ij)} \sim BND(0\ , \sigma_\varepsilon^2)$ dağılımına sahip olduğu varsayılır. Ayrıca; A faktörünün i-nci düzeyinde ve B faktörünün j-nci düzeyinde k-ncı gözlem değeri olan $Y_{ijk} \sim N\left(\mu_{.\ .\ .} + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}\ , \sigma_\varepsilon^2\right)$ dağılımlıdır. Eğer başlangıçta her iki faktöründe sabit etkili olduğu kabul edilirse bu takdirde etkileşim etkileri de sabit etkili olacaktır. Bu durum; $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$ ve $\sum_{i=1}^{a} \alpha\beta_{ij} = \sum_{j=1}^{b} \alpha\beta_{ij} = 0$ olacağı anlamına gelir. EKK yöntemi ile model parametreleri tahmin edilmek istendiğinde bu kısıtlar altında HKT en küçük yapılmaya çalışılır. Deneyde n tekrar olduğundan, toplam gözlem sayısı $N = a \times b \times n$ olacaktır.

Eşitlik (6.1) ile verilen model için bağımlı değişkene ait değişimi etkileyen ana etkiler ile etkileşim etkisine ait test edilecek hipotezler sırası ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

A faktörünün etkisinin önemliliği için

$H_0 :\ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$

$H_1 :\ \alpha_i \neq 0$, en az bir i için (6.2)

B faktörünün etkisinin önemliliği için

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0$, en az bir j için (6.3)

AB etkileşim etkisinin önemliliği için

$H_0 : \alpha\beta_{ij} = 0$, bütün i, j için

$H_1 : \alpha\beta_{ij} \neq 0$, en az bir i, j için (6.4)

Bu hipotezlerin test edilmesinde kullanılacak olan test istatistiklerinin türetilmesi bağımlı değişkene ait toplam değişimin (KT_{Genel}), Eşitlik (6.1) ile verilen modelde yer alan değişim kaynaklarına (A faktörü, B faktörü, AB etkileşimi ve Hata) ayrıştırılması temeline dayanmaktadır. Genel kareler toplamı Eşitlik (6.5)'de olduğu gibi

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...}\right)^2 \quad (6.5)$$

şeklinde tanımlıdır. Genel kareler toplamını değişim kaynaklarına ayrıştırabilmek için Eşitlik (6.5)'in sağ tarafında parantez içerisine $\overline{Y}_{i..}$, $\overline{Y}_{.j.}$, $\overline{Y}_{ij.}$ ve $\overline{Y}_{...}$ terimlerini bir ekleyip bir çıkartarak, Eşitlik (6.6)'da verildiği gibi düzenlenirse;

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right) + \left(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}\right) + \left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}\right) + \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.}\right)\right]^2$$

$$KT_{Genel} = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right)^2 + an\sum_{j1}^{b}\left(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}\right)^2 + n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.}\right)^2 \quad (6.6)$$

şeklinde elde edilir. Burada yer alan örnek ortalama istatistikleri ve hesaplama formülleri aşağıdaki eşitliklerde verilmektedir.

$\overline{Y}_{...}$: Genel örnek ortalaması olup, $\mu_{...}$ parametresinin EKK tahmin edicisidir.

$$\overline{Y}_{...} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} = \frac{T_{...}}{N} \quad (6.7)$$

$\overline{Y}_{i..}$: A faktörünün i-nci düzeyine ait örnek ortalaması olup, $\mu_{i..}$ parametresinin EKK tahmin edicisidir.

$$\overline{Y}_{i..} = \frac{1}{bn}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} = \frac{T_{i..}}{bn} \quad (6.8)$$

$\overline{Y}_{.j.}$: B faktörünün j-nci düzeyine ait örnek ortalaması olup, $\mu_{.j.}$ parametresinin EKK tahmin edicisidir.

$$\overline{Y}_{.j.} = \frac{1}{an}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} = \frac{T_{.j.}}{an} \quad (6.9)$$

$\overline{Y}_{ij.}$: A faktörünün i-nci ve B faktörünün j-nci düzeyine ait örnek ortalaması olup, $\mu_{ij.}$ parametresinin EKK tahmin edicisidir.

$$\overline{Y}_{ij.} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} = \frac{T_{ij.}}{n} \quad (6.10)$$

Eşitlik (6.6)'ya göre; genel kareler toplamının değişim kaynaklarına paylaştırılması sonucu elde edilen kareler toplamları;

$$KT_A = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{Y}_{i\,.\,.} - \overline{Y}_{.\,.\,.}\right)^2 \tag{6.11}$$

$$KT_B = an\sum_{j1}^{b}\left(\overline{Y}_{.\,j\,.} - \overline{Y}_{.\,.\,.}\right)^2 \tag{6.12}$$

$$KT_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{Y}_{i\,j\,.} - \overline{Y}_{i\,.\,.} - \overline{Y}_{.\,j\,.} + \overline{Y}_{.\,.\,.}\right)^2 \tag{6.13}$$

$$KT_{Hata} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{i\,j\,.}\right)^2 \tag{6.14}$$

eşitlikleri ile tanımlı olup, $KT_{Genel} = KT_A + KT_B + KT_{AB} + KT_{Hata}$ denklemi yazılabilir. Bütün kareler toplamlarının hesaplanmalarında ise sırasıyla;

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{i\,j\,k}^2 - \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N} \quad \text{ve} \quad T_{.\,.\,.} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk} \tag{6.15}$$

$$KT_A = \sum_{i=1}^{a}\frac{T_{i\,.\,.}^2}{bn} - \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N} \quad \text{ve} \quad T_{i\,.\,.} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk} \tag{6.16}$$

$$KT_B = \sum_{j=1}^{b}\frac{T_{.\,j\,.}^2}{an} - \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N} \quad \text{ve} \quad T_{.\,j\,.} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk} \tag{6.17}$$

$$KT_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{T_{i\,j\,.}^2}{n} - \sum_{i=1}^{a}\frac{T_{i\,.\,.}^2}{bn} - \sum_{j=1}^{b}\frac{T_{.\,j\,.}^2}{an} + \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N} \quad \text{ve} \quad T_{i\,j\,.} = \sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}$$

$$KT_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{T_{i\,j\,.}^2}{n} - KT_A - KT_B - \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N} \tag{6.18}$$

$$KT_{Hata} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{i\,j\,k}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{T_{i\,j\,.}^2}{n} = KT_{Genel} - \left[KT_A + KT_B + KT_{AB}\right] \tag{6.19}$$

eşitlikleri kullanılır. Yukarıda (6.2), (6.3) ve (6.4) ifadelerinde verilen H_0 hipotezlerinin test edilmesi sürecine ilişkin diğer işlemlerle birlikte test istatistikleri $a \times b$ faktöriyel tasarımına ait varyans analizi tablosu olarak bilinen Tablo 6.1'de sunuldu.

Tablo 6.1 İki Faktörlü Faktöriyel Tasarımına Ait Varyans Analizi Tablosu

Değişim Kaynağı	s.d	K.T.	K.O.	Test İstatistiği
A	$a-1$	KT_A	$KO_A = KT_A/(a-1)$	$F_A = KO_A/KO_{Hata}$
B	$b-1$	KT_B	$KO_B = KT_B/(a-1)$	$F_B = KO_B/KO_{Hata}$
AB	$(a-1)(b-1)$	KT_{AB}	$KO_{AB} = KT_{AB}/(a-1)(b-1)$	$F_{AB} = KO_{AB}/KO_{Hata}$
Hata	$ab(n-1)$	KT_{Hata}	$KO_{Hata} = KT_{Hata}/ab(n-1)$	
Genel	N-1	KT_{Genel}		

Karar: <u>A faktörünün etkisinin önemliliği için</u> α önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{(a-1);ab(n-1);\alpha}$ olmak üzere, eğer $F_A > F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve böylece A faktörünün etkisinin önemli olduğuna karar verilir, yani A faktörünün faktör düzeylerine ait ortalamalar arasında istatistiksel olarak önemli farklılıklar vardır. Hangi düzeylerin farklılık gösterdiği çoklu karşılaştırma teknikleri ile araştırılabilir. Eğer $F_A \leq F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilemez ve böylece A faktörünün etkisinin önemli olmadığına karar verilir, yani A faktörünün faktör düzeylerine ait ortalamalar arasında istatistiksel olarak önemli bir farklılık yoktur.

$\underline{B \text{ faktörünün etkisinin önemliliği için}}$ α önem seviyesinde kritik değe $F_t = F_{(b-1);ab(n-1);\alpha}$ olmak üzere, eğer $F_B > F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve böylece B faktörünün etkisinin önemli olduğuna karar verilir, yani B faktörünün faktör düzeylerine ait ortalamalar arasında istatistiksel olarak önemli farklılıklar vardır. Hangi düzeylerin farklılık gösterdiği çoklu karşılaştırma teknikleri ile araştırılabilir. Eğer $F_B \leq F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilemez ve böylece B faktörünün etkisinin önemli olmadığına karar verilir, yani B faktörünün faktör düzeylerine ait ortalamalar arasında istatistiksel olarak önemli bir farklılık yoktur.

$\underline{AB \text{ etkileşim etkisinin önemliliği için}}$ α önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{(a-1)(b-1);ab(n-1);\alpha}$ olmak üzere, eğer $F_{AB} > F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve böylece etkileşim etkisinin önemli olduğuna karar verilir, yani A ve B faktörleri bağımlı değişkeni birbirine bağlı olarak etkilemektedir. Diğer bir ifade ile A faktörünün etkisi diğer faktörün her düzeyinde aynı değildir. Eğer $F_{AB} \leq F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilemez ve etkileşim etkisinin önemsiz olduğuna karar verilir, yani A ve B faktörleri bağımlı değişkeni birbirinden bağımsız olarak etkilemektedir. Bu durumda A faktörünün etkisi diğer faktörün her düzeyinde aynıdır.

İki faktörlü $a \times b$ faktöriyel tasarımında örnek veri düzeni Tablo 6.2'de verildiği gibidir.

Tablo 6.2 İki faktörlü bir faktöriyel tasarımda örnek veri düzeni

	A - Faktörü				
B-Faktörü	$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_2}$	…	$\boldsymbol{A_a}$	$\boldsymbol{T_{.j.}}$
$\boldsymbol{B_1}$	Y_{111} Y_{112} ⋮ Y_{11n}	Y_{211} Y_{212} ⋮ Y_{21n}	… … ⋮ …	Y_{a11} Y_{a12} ⋮ Y_{a1n}	
$\boldsymbol{T_{i1.}}$	$\boldsymbol{T_{11.}}$	$\boldsymbol{T_{21.}}$	…	$\boldsymbol{T_{a1.}}$	$\boldsymbol{T_{.1.}}$
$\boldsymbol{B_2}$	Y_{121} Y_{122} ⋮ Y_{12n}	Y_{221} Y_{222} ⋮ Y_{22n}	… … ⋮ …	Y_{a21} Y_{a22} ⋮ Y_{a2n}	
$\boldsymbol{T_{i2.}}$	$\boldsymbol{T_{12.}}$	$\boldsymbol{T_{22.}}$	…	$\boldsymbol{T_{a2.}}$	$\boldsymbol{T_{.2.}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\boldsymbol{B_b}$	Y_{1b1} Y_{1b2} ⋮ Y_{1bn}	Y_{2b1} Y_{2b2} ⋮ Y_{2bn}	… … ⋮ …	Y_{ab1} Y_{ab2} ⋮ Y_{abn}	
$\boldsymbol{T_{ib.}}$	$\boldsymbol{T_{1b.}}$	$\boldsymbol{T_{2b.}}$	…	$\boldsymbol{T_{ab.}}$	$\boldsymbol{T_{.b.}}$
$\boldsymbol{T_{i..}}$	$\boldsymbol{T_{1..}}$	$\boldsymbol{T_{2..}}$	…	$\boldsymbol{T_{a..}}$	$T_{...}$
$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2}$	$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{1jk}^2}$	$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{2jk}^2}$	…	$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ajk}^2}$	$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{2jk}^2}$

Örnek 6.1 Kandaki kolestrol düzeyini etkilediği düşünülen iki faktörden birincisi diyet türü, ikincisi ise egzersiz sıklığıdır. Diyet türünün 2 düzeyi (yağlı ve yağsız diyet türü) özel seçimli ve egzersiz sıklığının 3 düzeyi (egzersiz yapmıyor, ara sıra egzersiz yapıyor ve düzenli egzersiz yapıyor) özel seçimlidir. Oluşturulan deney tasarımına ait her bir deneme kombinasyonunda 2 tekrar söz konusudur. Hazırlanan deney tasarımına göre birimler deneme kombinasyonlarına tamamen rastgele dağıtılmış olup birimlerden elde edilen kandaki kolestrol düzeyi ölçümleri aşağıda verilmiştir. Buna göre;

a) Uygun deney tasarımına karar veriniz ve model denklemini ifade ediniz?

b) Model parametrelerinin EKK tahmin edicilerini bulunuz?

c) Deney tasarımına ait varyans analizi tablosunu düzenleyiniz?

d) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde diyet türünün etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

e) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde egzersiz sıklığının etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

f) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde diyet türü ve etkileşim sıklığı etkileşim etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

Diyet Türü (B)	**Egzersiz Sıklığı (A)**			
	Egzersiz Yapmıyor (A_1)	**Arasıra Egzersiz Yapıyor (A_2)**	**Düzenli Egzersiz Yapıyor (A_3)**	$T_{.j.}$
Yağlı (B_1)	295 310	270 280	200 210	
$T_{i1.}$	$T_{11.}$=605	$T_{21.} = 550$	$T_{31.}$=410	$T_{.1.} = 1565$
Yağsız (B_2)	230 225	220 215	160 175	
$T_{i2.}$	$T_{12.} = 455$	$T_{22.} = 435$	$T_{32.} = 335$	$T_{.2.} = 1225$
$T_{i..}$	$T_{1..}$=1060	$T_{2..} = 985$	$T_{3..} = 745$	$T_{...} = 2790$
$\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2$	286650	245925	140325	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{2jk}^2 =$ 672900

Çözüm a) Bağımlı değişken (Y): Kandaki kolestrol düzeyi… Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Birinci Faktör (A): Egzersiz Sıklığı…Nitel ve ölme düzeyi sınıflama

Faktör düzeyleri: $\left\{\begin{matrix} Egzersiz\ yapmıyor\ (\boldsymbol{A_1}) \\ Arasıra\ Egzersiz\ yapıyor\ (\boldsymbol{A_2}) \\ Düzenli\ egzersiz\ yapıyor\ (\boldsymbol{A_3}) \end{matrix}\right]$	Faktör düzeyleri özel seçimli ve bağımsız gruplardır $(a = 3)$

İkinci Faktör (B): Diyet türü…Nitel ve ölme düzeyi sınıflama

Faktör düzeyleri: $\left\{\begin{matrix} Yağlı\ Diyet\ (\boldsymbol{B_1}) \\ Yağsız\ Diyet\ (\boldsymbol{B_2}) \end{matrix}\right]$	Faktör düzeyleri özel seçimli ve bağımsız gruplardır $(b = 2)$

Deneme kombinasyonlarını sayısı: $a \times b = 3 \times 2$=6 olup, deneme kombinasyonları da bağımsız gruplardır ve her bir deneme kombinasyonunda $n = 2$ tekrar yapılmıştır. Bu durumda toplam gözlem sayısı $N = a \times b \times n = 3 \times 2 \times 2 = 12$ dir. Deney birimleri deneme kombinasyonlarına tamamen rastgele dağıtılmışlardır. Bu açıklamaların ışığı problemin istatistiksel analizi için uygun olan deney tasarımı iki faktörlü $a \times b = 3 \times 2$ faktöriyel deney tasarımıdır. Bu deney tasarımı için model denklemi her iki faktör için faktör düzeyleri özel seçimli olduğundan sabit etki modeli olup Eşitlik (6.1)'de verildiği gibi;

$Y_{ijk} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}\ ;\ i = 1, 2, 3\ \ ; j = 1, 2\ ; k = 1, 2$

olarak ifade edilir. Bu model kapsamında birimlerin kandaki kolestrol değerlerindeki farklılığın nedeni, kişinin egzersiz sıklığı ile diyet türü gibi ana etkiler ve egzersiz sıklığı ile diyet türü arasında etkileşim etkisi de olabilir. Bu problemde bunlar analiz edilecektir.

b) Model parametrelerinin EKK tahmin edicileri:

Parametre	**EKK Tahmin Edicisi**	**Parametre**	**EKK Tahmin Edicisi**
$\mu_{...}$	$\overline{Y}_{...} = \frac{T_{...}}{N} = 232,5$		
$\mu_{11.}$	$\overline{Y}_{11.} = \frac{T_{11.}}{n} = 302,5$	$\alpha\beta_{11}$	$\widehat{\alpha\beta_{11}} = 9,17$
$\mu_{21.}$	$\overline{Y}_{21.} = \frac{T_{21.}}{n} = 275$	$\alpha\beta_{21}$	$\widehat{\alpha\beta_{21}} = 0,42$
$\mu_{31.}$	$\overline{Y}_{31.} = \frac{T_{31.}}{n} = 205$	$\alpha\beta_{31}$	$\widehat{\alpha\beta_{31}} = -9,58$
$\mu_{12.}$	$\overline{Y}_{12.} = \frac{T_{12.}}{n} = 227,5$	$\alpha\beta_{12}$	$\widehat{\alpha\beta_{12}} = -9,17$
$\mu_{22.}$	$\overline{Y}_{22.} = \frac{T_{22.}}{n} = 217,5$	$\alpha\beta_{22}$	$\widehat{\alpha\beta_{22}} = -0,42$
$\mu_{32.}$	$\overline{Y}_{32.} = \frac{T_{32.}}{n} = 167,5$	$\alpha\beta_{32}$	$\widehat{\alpha\beta_{32}} = 9,58$

$\mu_{1\,.\,.}$	$\overline{Y}_{1\,.\,.} = \frac{T_{1\,.\,.}}{bn} = 265$	α_1	$\widehat{\alpha_1} = 32{,}5$
$\mu_{2\,.\,.}$	$\overline{Y}_{2\,.\,.} = \frac{T_{2\,.\,.}}{bn} = 246{,}25$	α_2	$\widehat{\alpha_2} = 13{,}75$
$\mu_{3\,.\,.}$	$\overline{Y}_{3\,.\,.} = \frac{T_{3\,.\,.}}{bn} = 186{,}25$	α_3	$\widehat{\alpha_3} = -46{,}25$
$\mu_{.\,1\,.}$	$\overline{Y}_{.\,1\,.} = \frac{T_{.\,1\,.}}{an} = 260{,}83$	β_1	$\widehat{\beta_1} = 28{,}33$
$\mu_{.\,2\,.}$	$\overline{Y}_{.\,2\,.} = \frac{T_{.\,2\,.}}{an} = 204{,}17$	β_2	$\widehat{\beta_2} = -28{,}33$

c) Deney tasarımına ait varyans analizi tablosu:

Değişim Kaynağı	s.d	K.T.	K.O.	Test İstatistiği
Egzersiz Sıklığı ($\boldsymbol{A}$)	2	13537,5	6768,75	$F_A = \frac{KO_A}{KO_{Hata}} = 116{,}04$
Diyet Türü ($\boldsymbol{B}$)	1	9633,33	9633,33	$F_B = \frac{KO_B}{KO_{Hata}} = 165{,}15$
Etkileşim ($\boldsymbol{AB}$)	2	704,17	352,085	$F_{AB} = \frac{KO_{AB}}{KO_{Hata}} = 6{,}04$
Hata	6	350	58,33	
Genel	11	24225		

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{i\,j\,k}^2 - \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N} = 672900 - \frac{(2790)^2}{12} = 24225$$

$$KT_A = \sum_{i=1}^{a}\frac{T_{i\,.\,.}^2}{bn} - \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N} = \frac{1}{4}[(1060)^2 + (985)^2 + (745)^2] - \frac{(2790)^2}{12} = 13537{,}5$$

$$KT_B = \sum_{j=1}^{b}\frac{T_{.\,j\,.}^2}{an} - \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N} = \frac{1}{6}[(1565)^2 + (1225)^2] - \frac{(2790)^2}{12} = 9633{,}33$$

$$KT_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{T_{i\,j\,.}^2}{n} - \sum_{i=1}^{a}\frac{T_{i\,.\,.}^2}{bn} - \sum_{j=1}^{b}\frac{T_{.\,j\,.}^2}{an} + \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{T_{i\,j\,.}^2}{n} - KT_A - KT_B - \frac{T_{.\,.\,.}^2}{N}$$

$$= \frac{1}{2}[(605)^2 + (550)^2 + (410)^2 + (455)^2 + (435)^2 + (335)^2] - 13537{,}5 - 9633{,}33 - \frac{(2790)^2}{12} = 704{,}17$$

$$KT_{Hata} = KT_{Genel} - [KT_A + KT_B + KT_{AB}] = 24225 - 13537{,}5 - 9633{,}33 - 704{,}17 = 350$$

d) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde diyet türünün etkisinin önemliliği için hipotezler:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$ $H_1: \exists\beta_j \neq 0$	$H_0: \mu_{.\,1\,.} = \mu_{.\,2\,.} = \mu_{.\,.\,.}$ $H_1: \exists\mu_{.\,j\,.}$ diğerlerinden farklı	H_0: Diyet türü kandaki kolestrol miktarını etkilemez H_1: Diyet türü kandaki kolestrol miktarını etkiler

Test istatistiğinin alabileceği değer : $F_B = 165{,}15$ ve $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{b-1;ab(n-1);\alpha} = F_{1;6;0{,}05} = 5{,}99$ olup, $F_B = 165{,}15 > 5{,}99$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre diyet türü kandaki kolestrol düzeyi üzerinde etkilidir.

e) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde egzersiz sıklığının etkisinin önemliliği için hipotezler:

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ $H_1: \exists\alpha_i \neq 0$	$H_0: \mu_{1\,..} = \mu_{2\,..} = \mu_{3\,..} = \mu_{...}$ $H_1: \exists\mu_{i\,..}$ diğerlerinden farklı	H_0: Egzersiz sıklığı kandaki kolestrol miktarını etkilemez H_1: Egzersiz sıklığı kandaki kolestrol miktarını etkiler

Test istatistiğinin alabileceği değer : $F_A = 116{,}04$ ve $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{a-1;ab(n-1);\alpha} = F_{2;6;0{,}05} = 5{,}14$ olup, $: F_A = 116{,}04 > 5{,}14$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre egzersiz sıklığı kandaki kolestrol düzeyi üzerinde etkilidir.

f) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde diyet türü ve egzersiz sıklığı etkileşim etkisinin önemliliği için hipotezler:

$H_0: \alpha\beta_{11} = \alpha\beta_{21} = \alpha\beta_{31} = \alpha\beta_{12} = \alpha\beta_{22} = \alpha\beta_{32} = 0$ $H_1: \exists\alpha\beta_{ij} \neq 0$
$H_0: \mu_{11\,.} = \mu_{21\,.} = \mu_{31\,.} = \mu_{12\,.} = \mu_{22\,.} = \mu_{32\,.} = \mu_{...}$ $H_1: \exists\mu_{ij\,.}$ diğerlerinden farklı
H_0: Egzersiz sıklığı× diyet türü etkileşimi kandaki kolestrol miktarını etkilemez H_1: Egzersiz sıklığı× diyet türü etkileşimi kandaki kolestrol miktarını etkiler

Test istatistiğinin alabileceği değer : $F_{AB} = 6{,}04$ ve $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{(a-1)(b-1);ab(n-1);\alpha} = F_{2;6;0{,}05} = 5{,}14$ olup, $: F_{AB} = 6{,}04 > 5{,}14$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre Egzersiz sıklığı× diyet türü etkileşimi kandaki kolestrol miktarını etkilemektedir.

VI.2 Her Bir Deneme Kombinasyonunda Bir Gözlem Olması Durumunda İki Faktörlü Tasarım

Bu durumda iki faktör arasında etkileşim olmadığı varsayılarak model denklemi yeniden düzenlenerek sadece ana etkiler Bölüm VI.1'deki analize benzer şekilde incelenmektedir. Bu takdirde Eşitlik (6.1) ile verilen model denklemi, tekrar sayısı $n = 1$olacağından

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}\,;\; i = 1, 2, \dots, a\;\; ; j = 1, 2, \dots, b \qquad (6.20)$$

şeklinde düzenlenir.

Her bir deneme kombinasyonunda gözlem (tekrar) sayısı tek olduğunda etkileşimli faktöriyel tasarımlarda hata serbestlik derecesi sıfır olmaktadır. Böyle durumlarda en yüksek etkileşim (iki faktörlü tasarımda bu AB'dir) hata terimi olarak kullanılır. Ancak bu durumda ana etkileri test etmek mümkün olurken, etkileşim etkisini test etmek mümkün olmayacaktır. Bu nedenle etkileşim etkisi test edilmek istendiğinde her bir deneme kombinasyonunda en az iki tekrar yapılmalıdır.

Etkileşimin olmadığı, her bir deneme kombinasyonunda sadece bir tek tekrarın yapıldığı iki faktörlü bir faktöriyel tasarımda test edilecek hipotezler (6.2) ve (6.3) ifadelerinde verildiği gibi olup, bu hipotezlerin test işleminin özet olarak sunulduğu varyans analizi tablosu Tablo 6.3'de verildiği gibidir.

Tablo 6.3 Tek Tekrarlı İki Faktörlü Faktöriyel Tasarımına Ait Varyans Analizi Tablosu

Değişim Kaynağı	s.d	K.T.	K.O.	Test İstatistiği
A	$a-1$	KT_A	$KO_A = KT_A/(a-1)$	$F_A = KO_A/KO_{Hata}$
B	$b-1$	KT_B	$KO_B = KT_B/(a-1)$	$F_B = KO_B/KO_{Hata}$
Hata	$(a-1)(b-1)$	KT_{Hata}	$KO_{Hata} = KT_{Hata}/(a-1)(b-1)$	
Genel	N-1	KT_{Genel}		

Tablo 6.3'de $N = a \times b$ olup, ilgili kareler toplamları;

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N} \tag{6.21}$$

$$KT_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{T_{i.}^2}{b} - \frac{T_{..}^2}{N} \tag{6.22}$$

$$KT_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{T_{.j}^2}{a} - \frac{T_{..}^2}{N} \tag{6.23}$$

$$KT_{Hata} = KT_{Genel} - KT_A - KT_B \tag{6.24}$$

eşitliklerinden hesaplanır. Ana etkilerle ilgili hipotezler hakkında karar verme süreci Bölüm 6.1 ile aynıdır.

Örnek 6.2 Örnek 6.1 de verilen probleme ait veriyi deneme kombinasyonlarında tek tekrar olacak şekilde aşağıdaki gibi düzenleyerek problemi tekrar analiz edelim.

Diyet Türü (B)	Egzersiz Sıklığı (A)			
	Egzersiz Yapmıyor (A_1)	**Arasıra Egzersiz Yapıyor (A_2)**	**Düzenli Egzersiz Yapıyor (A_3)**	$T_{.j}$
Yağlı(B_1)	295	270	200	765
Yağsız (B_2)	230	220	160	610
$T_{i.}$	$T_{1.}$=525	$T_{2.} = 490$	$T_{3.} = 360$	$T_{..} = 1375$
$\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}^2$	**139925**	**121300**	**65600**	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{2jk}^2 =$ **326825**

a) Uygun deney tasarımına karar veriniz ve model denklemini ifade ediniz?

b) Model parametrelerinin EKK tahmin edicilerini bulunuz?

c) Deney tasarımına ait varyans analizi tablosunu düzenleyiniz?

d) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde diyet türünün etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

e) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde egzersiz sıklığının etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

Çözüm a) Bağımlı değişken (Y): Kandaki kolestrol düzeyi… Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Birinci Faktör (A): Egzersiz Sıklığı…Nitel ve ölme düzeyi sınıflama

Faktör düzeyleri: $\left\{\begin{matrix} Egzersiz\ yapmıyor\ (\boldsymbol{A_1}) \\ Arasıra\ Egzersiz\ yapıyor\ (\boldsymbol{A_2}) \\ Düzenli\ egzersiz\ yapıyor\ (\boldsymbol{A_3}) \end{matrix}\right]$	Faktör düzeyleri özel seçimli ve bağımsız gruplardır $(a = 3)$

İkinci Faktör (B): Diyet türü…Nitel ve ölme düzeyi sınıflama

Faktör düzeyleri: $\left\{\begin{matrix} Yağlı\ Diyet\ (\boldsymbol{B_1}) \\ Yağsız\ Diyet\ (\boldsymbol{B_2}) \end{matrix}\right]$	Faktör düzeyleri özel seçimli ve bağımsız gruplardır $(b = 2)$

Deneme kombinasyonlarını sayısı: $a \times b = 3 \times 2$=6 olup, deneme kombinasyonları da bağımsız gruplardır ve her bir deneme kombinasyonunda $n = 1$ tekrar yapılmıştır. Bu durumda toplam gözlem sayısı $N = a \times b = 3 \times 2 = 6$ dir. Deney birimleri deneme kombinasyonlarına tamamen rastgele dağıtılmışlardır. Bu açıklamaların ışığı problemin istatistiksel analizi için uygun olan deney tasarımı tek tekrarlı, iki faktörlü ve etkileşimsiz $a \times b = 3 \times 2$ faktöriyel deney tasarımıdır. Bu deney tasarımı için model denklemi her iki faktör için faktör düzeyleri özel seçimli olduğundan sabit etki modeli olup Eşitlik (6.20)'de verildiği gibi;

$Y_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}\ ;\ i = 1,2,3\ ;j = 1,2$

olarak ifade edilir.

b) Model parametrelerinin EKK tahmin edicileri:

Parametre	EKK Tahmin Edicisi	Parametre	EKK Tahmin Edicisi
$\mu_{..}$	$\overline{Y}_{..} = \frac{T_{..}}{N} = 229{,}17$		
$\mu_{1.}$	$\overline{Y}_{1.} = \frac{T_{1.}}{b} = 262{,}5$	α_1	$\widehat{\alpha_1} = 33{,}33$
$\mu_{2.}$	$\overline{Y}_{2.} = \frac{T_{2.}}{b} = 245$	α_2	$\widehat{\alpha_2} = 15{,}83$
$\mu_{3.}$	$\overline{Y}_{3.} = \frac{T_{3.}}{b} = 180$	α_3	$\widehat{\alpha_3} = -49{,}17$
$\mu_{.1}$	$\overline{Y}_{.1} = \frac{T_{.1}}{a} = 255$	β_1	$\widehat{\beta_1} = 25{,}83$
$\mu_{.2}$	$\overline{Y}_{.2} = \frac{T_{.2}}{a} = 203{,}33$	β_2	$\widehat{\beta_2} = -25{,}84$

c) Deney tasarımına ait varyans analizi tablosu:

Değişim Kaynağı	**s.d**	**K.T.**	**K.O.**	**Test İstatistiği**
Egzersiz Sıklığı (A)	2	7558,33	3779.17	$F_A = \frac{KO_A}{KO_{Hata}} = 47{,}74$
Diyet Türü (B)	1	4004,17	4004,17	$F_B = \frac{KO_B}{KO_{Hata}} = 50{,}58$
Hata (veya AB)	2	158,33	79,165	
Genel	5	11720,83		

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N} = 326825 - \frac{(1375)^2}{6} = 11720{,}83$$

$$KT_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{T_{i.}^2}{b} - \frac{T_{..}^2}{N} = \frac{1}{2}[(525)^2 + (490)^2 + (360)^2] - \frac{(1375)^2}{6} = 7558{,}33$$

$$KT_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{T_{.j}^2}{a} - \frac{T_{..}^2}{N} = \frac{1}{3}[(765)^2 + (610)^2] - \frac{(1375)^2}{6} = 4004{,}17$$

$$KT_{Hata} = KT_{Genel} - KT_A - KT_B = 11720{,}83 - 7558{,}33 - 4004{,}17 = 158{,}33$$

d) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde diyet türünün etkisinin önemliliği için hipotezler:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$ $H_1: \exists \beta_j \neq 0$	$H_0: \mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{...}$ $H_1: \exists \mu_{.j.}$ diğerlerinden farklı	H_0: Diyet türü kandaki kolestrol miktarını etkilemez H_1: Diyet türü kandaki kolestrol miktarını etkiler

Test istatistiğinin alabileceği değer : $F_B = 50{,}58$ ve $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{b-1;(a-1)(b-1);\alpha} = F_{1;2;0{,}05} = 18{,}51$ olup, $F_B = 50{,}58 > 18{,}51$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre diyet türü kandaki kolestrol düzeyi üzerinde etkilidir.

e) Kandaki kolestrol düzeyi üzerinde egzersiz sıklığının etkisinin önemliliği için hipotezler:

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ $H_1: \exists \alpha_i \neq 0$	$H_0: \mu_{1\,..} = \mu_{2\,..} = \mu_{3\,..} = \mu_{...}$ $H_1: \exists \mu_{i\,..}$ diğerlerinden farklı	H_0: Egzersiz sıklığı kandaki kolestrol miktarını etkilemez H_1: Egzersiz sıklığı kandaki kolestrol miktarını etkiler

Test istatistiğinin alabileceği değer : $F_A = 47{,}74$ ve $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{a-1;(a-1)(b-1);\alpha} = F_{2;2;0{,}05} = 19$ olup, $: F_A = 47{,}74 > 19$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre egzersiz sıklığı kandaki kolestrol düzeyi üzerinde etkilidir.

6.2.1 Tukey'in Toplamsallık Testi

Her bir deneme kombinasyonunda tek tekrar olması durumunda yukarıda bahsedilen yoldan faktörlerin etkileşim etkisi test edilememektedir. Ancak; iki faktör arasında etkileşim olup olmadığı Tukey'in toplamsallık testi ile incelenebilmektedir. Eşitlik (6.1) ile verilen model denklemi; iki faktörlü faktöriyel tasarım için model etkileşim etkisinin belli bir fonksiyonel forma sahip ($\gamma_{ij} = k\alpha_i\beta_j, i = 1, 2, \dots, a; j = 1, 2, \dots, b$) olduğu varsayımı altında tekrar düzenlenirse;

$$Y_{ij} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + k\alpha_i\beta_j + \varepsilon_{ij}\ ;\ i = \overline{1, a}\ ; j = \overline{1, b} \tag{6.25}$$

şeklinde yazılır. Bu fonksiyonel formda k bilinmeyen parametre, α_i ve β_j sırasıyla sütun ve satır etkileridir. Tukey'in toplamsallık testinde etkileşim etkisinin önemli olup olmadığını belirlemek için test edilecek hipotezler k bilinmeyen parametresi üzerinde oluşturulur.

$H_0: k = 0$ (Etkileşim önemsiz)
$H_1: k \neq 0$ (Etkileşim önemli)

Test istatistiği, Tukey'in toplamsallık test istatistiği olarak bilinen;

$$F_{Tukey} = \frac{KT_{AB^*/1}}{KT_{Hata^*/[(a-1)(b-1)-1]}} \sim F_{1;[(a-1)(b-1)-1]} \tag{6.26}$$

F istatistiğidir. Burada KT_{AB^*} ve KT_{Hata^*} değerleri sırasıyla;

$$KT_{AB^*} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left((\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})(\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..})Y_{ij}\right)\right]^2}{\sum_{i=1}^{a}(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 \sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..})^2} \tag{6.27}$$

$$KT_{Hata^*} = KT_{Genel} - KT_A - KT_B - KT_{AB^*} \tag{6.28}$$

Karar: α önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{1;[(a-1)(b-1)-1];\,\alpha}$ olmak üzere $F_{Tukey} > F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve etkileşimin önemli olduğuna karar verilir. $F_{Tukey} \leq F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilemez ve böylece etkileşimin önemsiz olduğuna karar verilir.

Örnek 6.3 Örnek 6.2'deki veriyi kullanarak etkileşim etkisinin önemli olup olmadığını Tukey'in toplamsallık testi ile araştırınız?

Diyet Türü (B)	**Egzersiz Sıklığı (A)**			
	Egzersiz Yapmıyor (A_1)	**Arasıra Egzersiz Yapıyor (A_2)**	**Düzenli Egzersiz Yapıyor (A_3)**	$T_{.\,j}$
Yağlı(B_1)	295	270	200	765
Yağsız (B_2)	230	220	160	610
$T_{i\,.}$	$T_{1\,.}$ =525	$T_{2\,.} = 490$	$T_{3\,.} = 360$	$T_{.\,.} = 1375$
$\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}^2$	**139925**	**121300**	65600	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{2jk}^2 =$ **326825**

Çözüm: Model… $Y_{ij} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + k\alpha_i\beta_j + \varepsilon_{ij}$; $i = 1,2,3$; $j = 1,2$

Hipotez;

$H_0: k = 0$ (Etkileşim önemsiz)

$H_1: k \neq 0$ (Etkileşim önemli)

Test istatistiği: $F_{Tukey} = \dfrac{KT_{AB^*}/1}{KT_{Hata^*}/[(a-1)(b-1)-1]} \sim F_{1;[(a-1)(b-1)-1]}$

$$KT_{AB^*} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left((\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})Y_{ij}\right)\right]^2}{\sum_{i=1}^{a}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})^2}$$

$$\sum_{i=1}^{a=3}\sum_{j=1}^{b=2}\left((\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})Y_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{3}[(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})]\ [(\bar{Y}_{.1}-\bar{Y}_{..})Y_{i1} + (\bar{Y}_{.2}-\bar{Y}_{..})Y_{i2}]$$

$$= (\bar{Y}_{1.}-\bar{Y}_{..})[(\bar{Y}_{.1}-\bar{Y}_{..})Y_{11} + (\bar{Y}_{.2}-\bar{Y}_{..})Y_{12}] + (\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{..})[(\bar{Y}_{.1}-\bar{Y}_{..})Y_{21} + (\bar{Y}_{.2}-\bar{Y}_{..})Y_{22}] + (\bar{Y}_{3.}-\bar{Y}_{..})[(\bar{Y}_{.1}-\bar{Y}_{..})Y_{31} + (\bar{Y}_{.2}-\bar{Y}_{..})Y_{32}]$$

$$= (262{,}5 - 229{,}17)[(255 - 229{,}17)295 + (203{,}33 - 229{,}17)230] + (245 - 229{,}17)[(255 - 229{,}17)270 + (203{,}33 - 229{,}17)220] + (180 - 229{,}17)[(255 - 229{,}17)200 + (203{,}33 - 229{,}17)160] = 55882.7445 + 20409{,}619 - 50723.772 = 25568{,}5915$$

$$\sum_{i=1}^{a}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2 = (262{,}5 - 229{,}17)^2 + (245 - 229{,}17)^2 + (180 - 229{,}17)^2 = 3779{,}17$$

$$\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})^2 = (255 - 229{,}17)^2 + (203{,}33 - 229{,}17)^2 = 1334{,}8945$$

$KT_{AB^*} = \frac{(25568,5915)^2}{(3779,17)(1334,8945)} = 129,59$

$KT_{Hata^*} = KT_{Genel} - KT_A - KT_B - KT_{AB^*} = 11720,83 - 7558,33 - 4004,17 - 129,59 = 28,74$

Buna göre test istatistiğinin alabileceği değer; $F_{Tukey} = \frac{(129,59)/1}{(28,74)/1} = 4,51$ olarak hesaplanır. $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_{1;[(a-1)(b-1)-1];\alpha} = F_{1;1;0,05} = 161,4$ olup, 4,51<161,4 olduğundan H_0 ret edilemez. Böylece etkileşim etkisi önemsizdir.